

Петренко О.О. — рецензент Ладогубець В.В.
 ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, Київ, Україна

Новий метод обчислення власних векторів матриці

Обґрунтована можливість обчислення власних векторів матриці застосуванням до рішення відповідної системи рівнянь з виродженою матрицею

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad (1)$$

методу діагональної модифікації [1], що зводить всю процедуру до LU -розкладу матриці і рішення тільки однієї трикутної системи $Ux = b$, в якій запропонованим чином усуваються виродження матриці U і змінюється початковий вигляд вектору b . Процедура, що запропонована, ілюструється прикладом знаходження власного вектора матриці третього порядку $A = \{\{5, 3, 1\}, \{3, 5, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$ для власного числа $\lambda_1 = k_1 = 9.772$:

$b = \{0, 0, 0\}$

(нульовий вектор правої частини тотожності (1))

$B = A - k_1 * \text{IdentityMatrix}[3];$

$\{lu, p, c\} = \text{LUDecomposition}[B]$

$u = \text{lu SparseArray}[\{i_, j_ /; j \geq i + 1, \{3, 3\}\};$

(обчислюється вироджена матриця u)

$\text{Out} :=$

$l = \{\{1, 0, 0\}, \{-0.209556, 1, 0\}, \{-0.628667, -0.795333, 1\}\}$

$u = \{\{-4.772, 3., 1.\}, \{0, 3.62867, -4.56244\}, \{0, 0, 5.33333 \cdot 10^{-6}\}\}$

(отримане значення елемента $u_{33} = 5.33333 \times 10^{-6}$)

$u_1 = \text{ReplacePart}[u, \{3, 3\} \rightarrow 1];$

(усувається виродження матриці u переходом до u_1 з елементом $u_{33} = 1$;

$b_1 = \text{ReplacePart}[b, 3 \rightarrow 1];$

(корегується вектор правої частини введенням елемента $b_3 = 1$);

$\text{Out} := \{0.528451, 0.664439, 0.528451\}$

Всі інші власні вектори, що відповідають першому власному числу $\lambda_1 = 9.772$, відрізняються від базового вектора M_1 довільним масштабним коефіцієнтом, тобто всі вони мають однакову орієнтацію в багатовимірному просторі. Якщо цей масштабний коефіцієнт визначити через обернене значення норми власного вектора матриці, то можна отримати нормований власний вектор для вибраного власного числа, як то зроблено в наведеному вище прикладі, який і несе інформацію про орієнтацію безлічі власних векторів, що відповідають цьому власному числу.

Запропонована процедура розширена на випадки кратних і комплексно-спряжених власних чисел матриці. Показана також можливість зміни (чи обнуління) окремих власних значень матриці при збереженні відповідних власних векторів матриці.

Література

1. Петренко О.О. До рішення вироджених лінійних систем рівнянь. — Системні дослідження і інформаційні технології. — Київ, №2, 2010, — с.